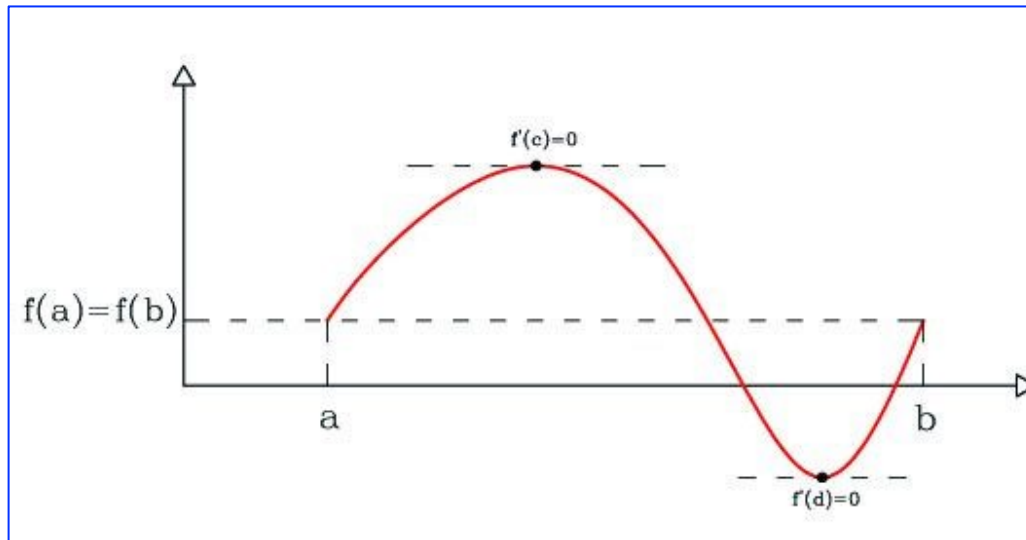


DOCENTE: Vincenzo Pappalardo
MATERIA: Matematica

TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE



IL TEOREMA DI ROLLE

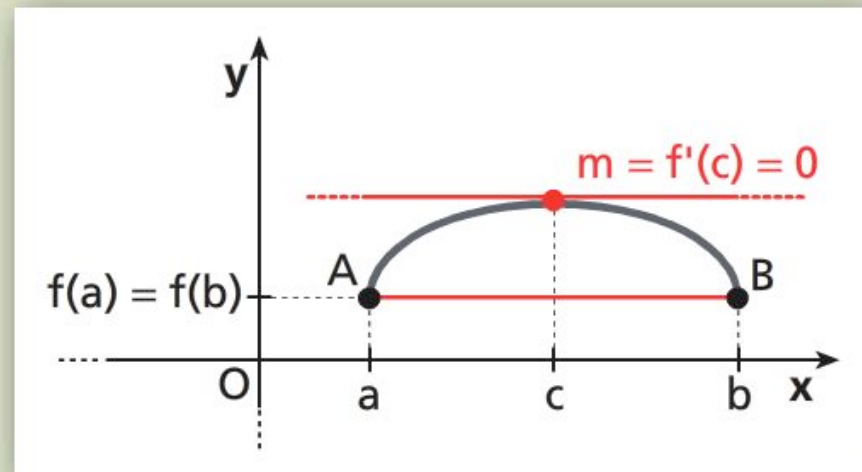
TEOREMA

Teorema di Rolle

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ con le seguenti proprietà:

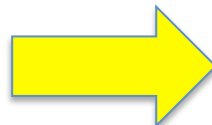
- $f(x)$ è continua in $[a; b]$,
- $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$,
- $f(a) = f(b)$,

allora esiste almeno un punto c , interno all'intervallo, per il quale risulta $f'(c) = 0$.



Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a; b]$
2. $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$
3. $f(a) = f(b)$



Tesi

$$\exists c \in]a; b[: f'(c) = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Poiché $f(x)$ per ipotesi è continua nell'intervallo chiuso $[a; b]$, per il teorema di Weierstrass, essa ammette massimo M e minimo m in tale intervallo, cioè esistono $c, d \in [a; b]$ tali che:

$$m = f(c) \leq f(x) \leq f(d) = M \quad \forall x \in [a; b].$$

● *Teorema di Weierstrass:*
se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a; b]$, allora assume massimo assoluto e minimo assoluto in $[a; b]$.

- **Primo caso:** $m = M$. Allora:

$$m = f(c) = f(x) = f(d) = M \quad \forall x \in [a; b],$$

e quindi f è costante. Pertanto la sua derivata è nulla per ogni $x \in [a; b]$.

- **Secondo caso:** $m < M$. La funzione non è costante, e poiché $f(a) = f(b)$ per ipotesi, almeno uno dei punti c e d deve essere interno all'intervallo $[a; b]$. Per esempio, supponiamo che $c \in]a; b[$. Essendo $f(c)$ il valore minimo, per ogni incremento h (positivo o negativo) tale che $c + h \in]a; b[$ si ha:

$$f(c + h) \geq f(c), \quad \text{cioè} \quad f(c + h) - f(c) \geq 0.$$

Allora, considerando i rapporti incrementali relativi al punto c , risulta:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad \text{per } h > 0;$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad \text{per } h < 0.$$

● L'inverso del teorema della permanenza del segno afferma che se esiste un intorno del punto x_0 in cui $f(x) \geq 0$ ed esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, allora $l \geq 0$.

Ne consegue che, per l'inverso del teorema della permanenza del segno:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

I due limiti rappresentano rispettivamente la derivata destra e sinistra di $f(x)$ in c e, poiché $f(x)$ è derivabile, devono essere finiti e coincidere, pertanto:

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = 0.$$

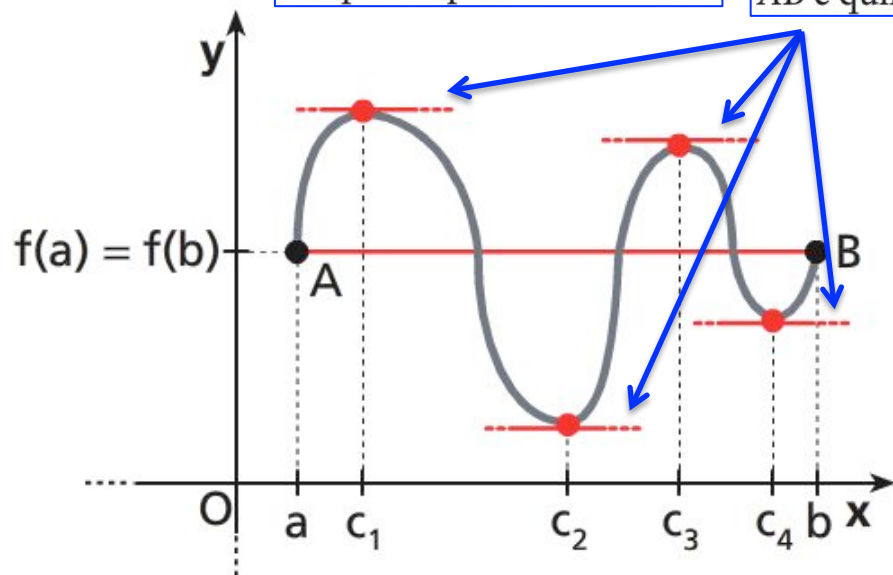
● Poiché $c \in]a; b[$, per ipotesi $f(x)$ è derivabile in c .

Il teorema si dimostra analogamente nel caso in cui d , anziché c , sia interno all'intervallo $[a; b]$.

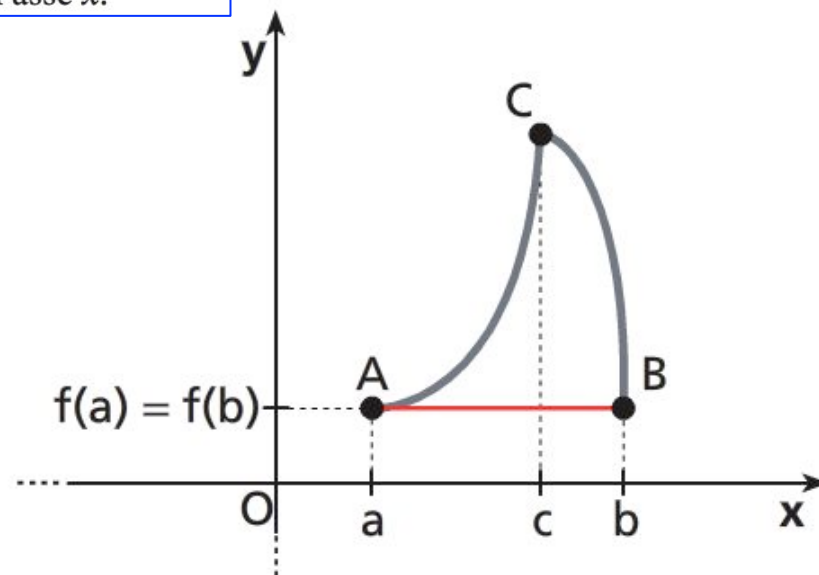
Il teorema afferma che esiste *almeno* un punto $c \in]a; b[$ in cui la derivata $f'(x)$ si annulla, ma nulla vieta che i punti siano più di uno, come si vede nella figura 1a. Se una delle ipotesi non è soddisfatta, il teorema può non essere verificato, come si vede nella figura 1b.

● Da un punto di vista geometrico, il teorema di Rolle dice che, quando sono verificate le sue ipotesi, esiste sempre un punto *stazionario*

e cioè esiste sempre un punto c in cui la tangente al grafico è parallela alla retta AB e quindi all'asse x .



a. Il grafico di questa funzione presenta più punti in cui la tangente è parallela alla retta AB e all'asse x . In questi punti $f'(x) = 0$.



b. Nel punto c la funzione non è derivabile. Il suo grafico è privo di punti in cui la tangente è parallela alla retta AB e all'asse x .

ESEMPIO

Consideriamo, nell'intervallo $[-1; 1]$, la funzione:

$$f(x) = x^4 - 2x^2.$$

$f(x)$ è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, e ha derivata:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

Inoltre $f(-1) = -1 = f(1)$. Quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Rolle.

In questo caso, esistono tre punti in $[-1; 1]$ per i quali la derivata si annulla, infatti:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

In particolare, $x_2 \in]-1; 1[$ e quindi il teorema è verificato.

IL TEOREMA DI LAGRANGE

TEOREMA

Teorema di Lagrange (o del valor medio)

Se una funzione $f(x)$ è:

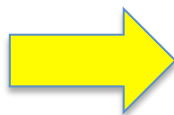
- continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$,
- derivabile in ogni punto interno a esso,

allora esiste almeno un punto c interno all'intervallo per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a; b]$
2. $f(x)$ è derivabile in $]a; b[$



Tesi

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione:

$$F(x) = f(x) - kx, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- $F(x)$ è continua in $[a; b]$, perché somma di funzioni continue in $[a; b]$;
- $F(x)$ è derivabile in $]a; b[$, perché somma di funzioni derivabili in $]a; b[$.

Determiniamo k in modo che $F(x)$ soddisfi la terza ipotesi del teorema di Rolle, e cioè si abbia $F(a) = F(b)$.

Deve essere:

$$f(a) - ka = f(b) - kb \quad \rightarrow \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sostituiamo nella funzione:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x.$$

Poiché $F(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $F'(c) = 0$. Calcoliamo la derivata di $F(x)$,

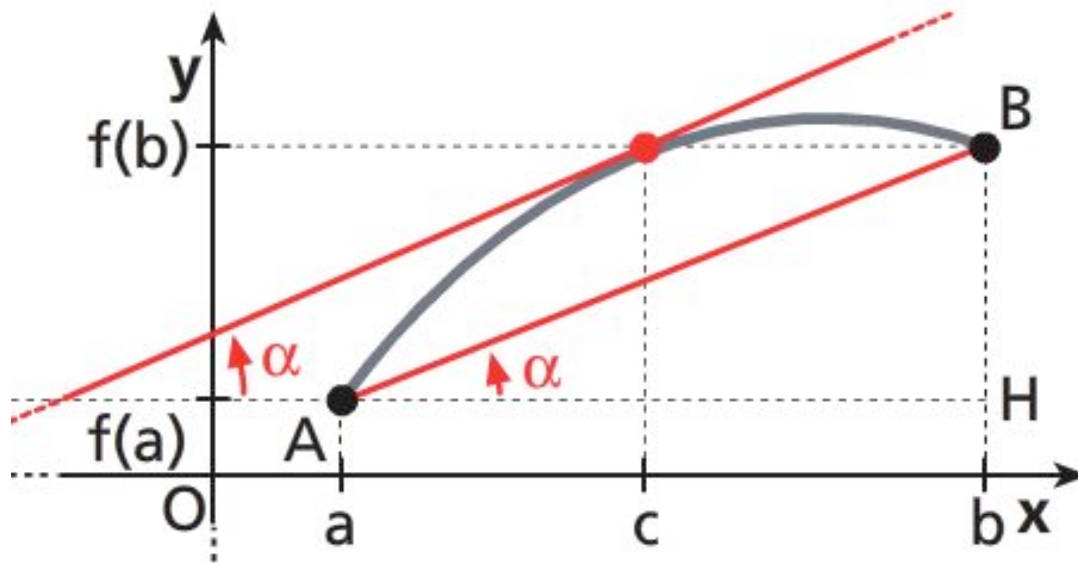
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

da cui:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Otteniamo quindi la tesi:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Diamo
un'interpretazione
geometrica del
teorema.

Essendo $y = f(x)$ derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$, in tutti i suoi punti il suo grafico è dotato di retta tangente. Il teorema afferma che deve esserci almeno un punto c per il quale questa retta tangente è parallela ad AB .

Per capirlo, consideriamo il triangolo rettangolo ABH , dove si ha:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{HB}}{\overline{AH}}.$$

Ma $\overline{HB} = f(b) - f(a)$ e $\overline{AH} = b - a$.

● Nel triangolo rettangolo ABH si applica il teorema dei triangoli rettangoli,

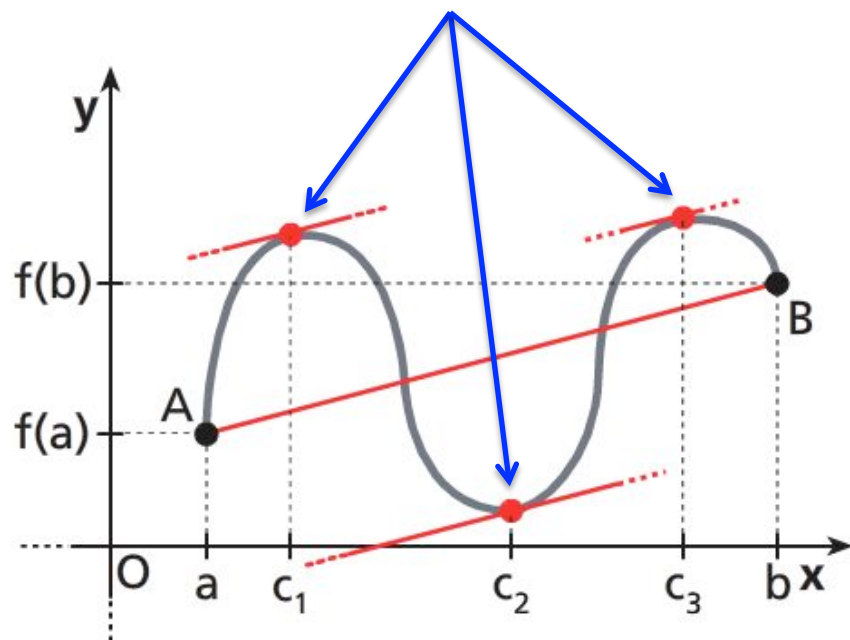
Se la retta tangente in c alla curva è parallela ad AB , deve avere il medesimo coefficiente angolare, perciò $\operatorname{tg} \alpha = f'(c)$.

Sostituendo nella relazione precedente, si ha:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

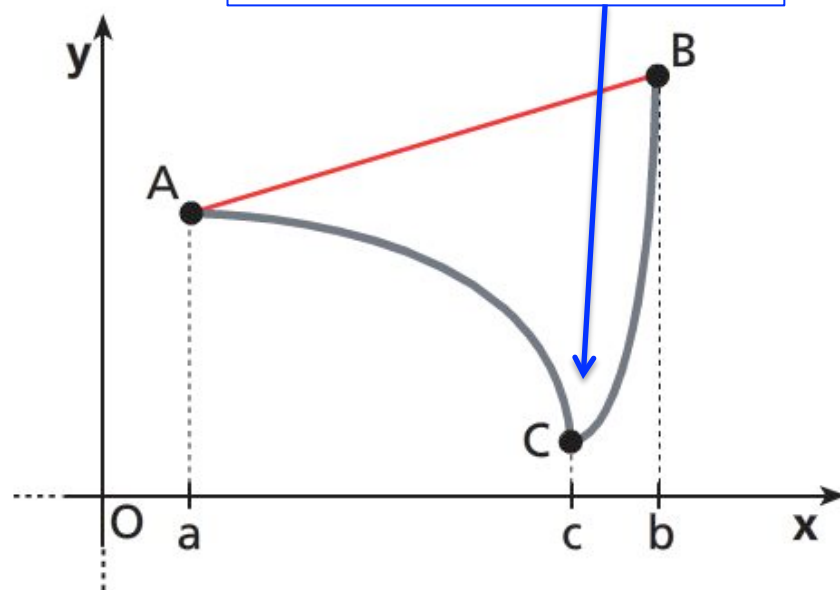
Anche per il teorema di Lagrange valgono osservazioni analoghe a quelle del teorema di Rolle.

a) I punti che verificano il teorema di Lagrange possono essere più di uno.



a. Il grafico di questa funzione ha più punti in cui la tangente è parallela alla retta AB .

b) Esaminiamo un esempio in cui una delle ipotesi non è verificata e quindi non troviamo la proprietà caratteristica del teorema.



b. Nel punto c la funzione non è derivabile. Il suo grafico non ha punti in cui la tangente è parallela alla retta AB .

ESEMPIO

Consideriamo, nell'intervallo $[1; 2]$, la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Questa funzione è continua e derivabile per ogni $x \neq 0$. Quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange.

Verifichiamo se esiste un punto $c \in]1; 2[$ tale che $f'(c) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$.

Poiché

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}$$

e

$$f(1) = 2, f(2) = \frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2},$$

deve essere:

$$1 - \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad c^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c = \pm\sqrt{2}.$$

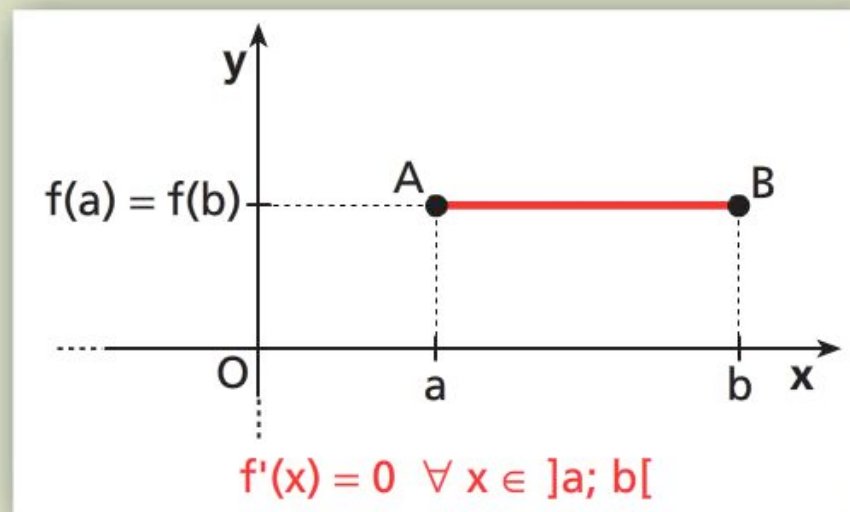
Quindi, per $c_1 = \sqrt{2} \in]1; 2[$, il teorema di Lagrange è verificato.

LE CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI LAGRANGE

Dal teorema di Lagrange discendono i seguenti teoremi.

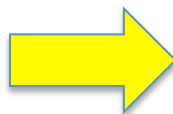
TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e tale che $f'(x)$ è nulla in ogni punto interno dell'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a; b]$.



Ipotesi

1. $f(x)$ continua in $[a; b]$
2. $f'(x) = 0$ in $]a; b[$



Tesi

$$f(x) = k \quad \text{in }]a; b[$$

DIMOSTRAZIONE

Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[a; x]$, dove x è un punto qualsiasi di $[a; b]$ diverso da a ; esiste un punto $c \in]a; x[$ per cui si ha:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0 \rightarrow f(x) - f(a) = 0 \rightarrow f(x) = f(a).$$

Quindi f è costante in tutto $[a; b]$.

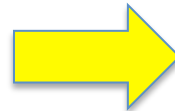
● $f'(c) = 0$ per ipotesi.

TEOREMA

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$ e tali che $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in]a; b[$, allora esse differiscono per una costante.

Ipotesi

1. $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a; b]$
2. $f'(x) = g'(x)$ in $]a; b[$



Tesi

$$f(x) - g(x) = k \text{ in }]a; b[$$

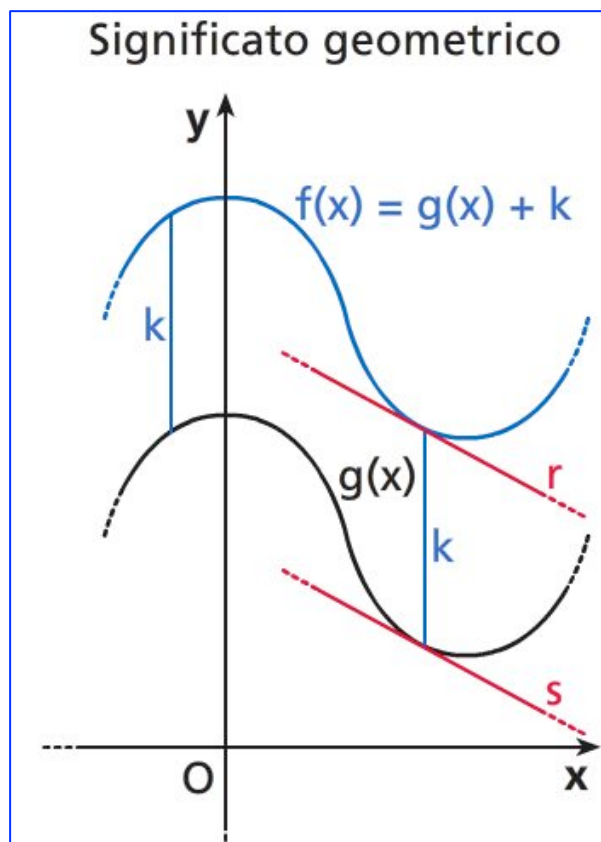
DIMOSTRAZIONE

Chiamiamo $z(x)$ la loro differenza, ossia $z(x) = f(x) - g(x)$; si ha:

$$z'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Per ipotesi $f'(x) = g'(x)$, quindi $z'(x) = 0$, per ogni x in $]a; b[$.

Per il teorema precedente, $z(x) = k$ in tutto $[a; b]$ e quindi $f(x) - g(x) = k$.



Se $f'(x) = g'(x)$, allora
le rette r ed s sono
parallele.

Criterio di derivabilità

TEOREMA

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ a eccezione al più di un punto $x_0 \in]a; b[$ e se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l,$$

allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta:

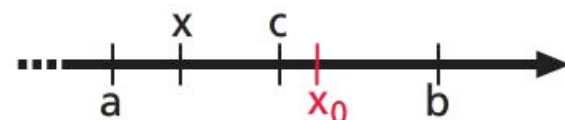
$$f'(x_0) = l.$$

● Il criterio è utile per esaminare la derivabilità di una funzione in un punto senza ricorrere al calcolo del limite del rapporto incrementale.

DIMOSTRAZIONE

Se consideriamo un punto $x < x_0$, allora nell'intervallo $[x; x_0]$ è applicabile il teorema di Lagrange, perché $f(x)$ è continua e derivabile nei punti interni, quindi deve esistere almeno un punto $c \in]x; x_0[$ per il quale si ha:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(c).$$



● Questo è vero
 $\forall x \in]a; x_0[$.

Calcoliamo i limiti dei due membri per $x \rightarrow x_0^-$. Al primo membro, per definizione di derivata sinistra, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'_-(x_0).$$

Al secondo membro, se $x \rightarrow x_0^-$ anche $c \rightarrow x_0^-$, quindi per ipotesi si ha:

$$\lim_{c \rightarrow x_0^-} f'(c) = l.$$

Dunque si ottiene:

$$f'_-(x_0) = l.$$

Si procede in modo analogo se si considera $x > x_0$, ottenendo:

$$f'_+(x_0) = l.$$

Si conclude allora che:

$$f'(x_0) = l.$$

● Il teorema esprime una **condizione sufficiente** ma non necessaria per la derivabilità. Quindi, anche se non sono verificate le ipotesi del teorema, la funzione può essere derivabile.

ESEMPIO

Verifichiamo se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 1} & \text{se } x \leq 0 \\ -\sqrt{x^2 + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è derivabile in $x = 0$.

La funzione è continua perché $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x^2 + 1} = -1$.

Calcoliamo $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$:

$$f'_-(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}},$$

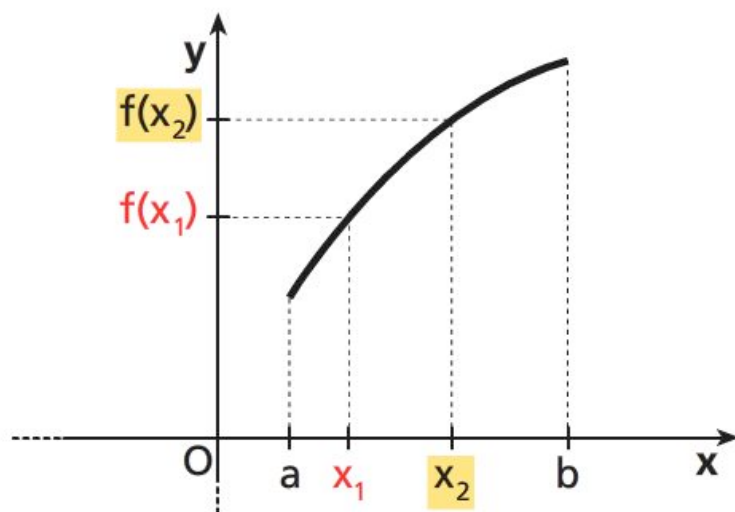
$$f'_+(x) = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'_+(x) = 0$, la funzione è derivabile in $x = 0$.

Le funzioni crescenti e decrescenti

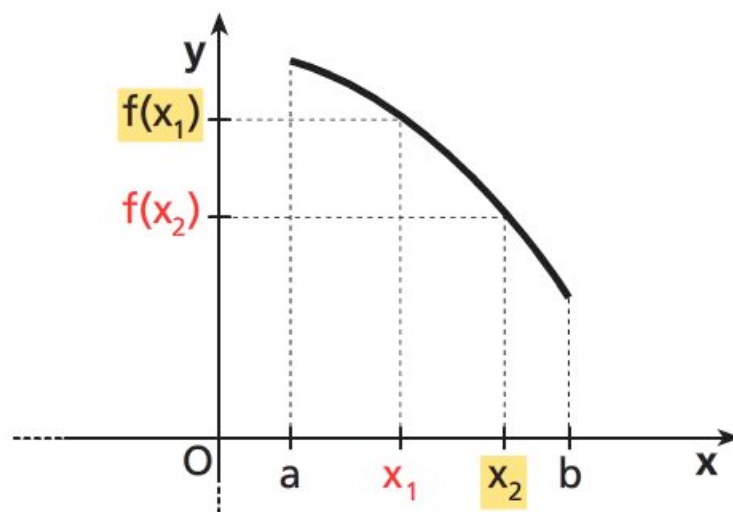
Riportiamo la definizione di funzione crescente e decrescente.

$$\forall x_1, x_2 \in [a; b]$$
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$



a. Se una funzione $y = f(x)$ è crescente in un intervallo, incrementando la variabile x si ottiene un incremento anche della y .

$$\forall x_1, x_2 \in [a; b]$$
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



b. Se una funzione $y = f(x)$ è decrescente in un intervallo, incrementando la variabile x si ottiene un decremento della y .

Vale il seguente teorema:

TEOREMA

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I , essa è:

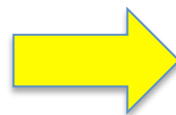
● L'intervallo I può essere sia limitato sia illimitato.

1. crescente in I , se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è positiva;
2. decrescente in I , se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è negativa.

● Questo teorema è una **condizione sufficiente** per affermare che una funzione è crescente o decrescente in un intervallo.

1. Ipotesi

1. $f(x)$ continua in I
2. $f'(x) > 0 \quad \forall x$ interno a I

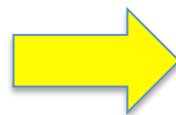


1. Tesi

$f(x)$ crescente in I

2. Ipotesi

1. $f(x)$ continua in I
2. $f'(x) < 0 \quad \forall x$ interno a I



2. Tesi

$f(x)$ decrescente in I

DIMOSTRAZIONE

1. Siano x_1 e $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$.

Per il teorema di Lagrange, applicato a $f(x)$ nell'intervallo $[x_1; x_2]$, si ha:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad \text{con } c \in]x_1; x_2[.$$

Essendo $x_2 - x_1 > 0$ e per ipotesi $f'(c) > 0$, anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$, da cui:

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Poiché x_1 e x_2 sono punti qualsiasi di I , la funzione è crescente in I .

2. Procedendo in modo analogo al caso precedente si ottiene:

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Infatti $x_2 - x_1 > 0$ e per ipotesi $f'(c) < 0$, quindi $f(x_2) < f(x_1)$.

Pertanto la funzione è decrescente in I .

● Il teorema di Lagrange vale perché la funzione è continua in $[x_1; x_2]$ e derivabile in $]x_1; x_2[$.

IMPORTANTE

Questo teorema consente di determinare gli intervalli in cui una funzione è crescente o decrescente attraverso lo studio del segno della sua derivata prima.

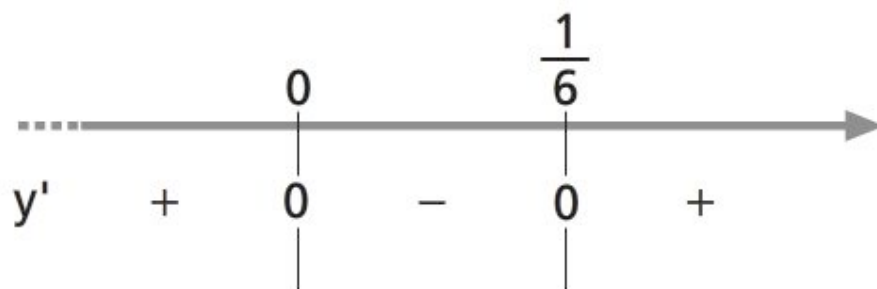
ESEMPIO

Determiniamo in quali intervalli la funzione $y = 4x^3 - x^2 + 1$, definita per ogni x reale, è crescente e in quali intervalli è decrescente.

Calcoliamo la derivata prima: $y' = 12x^2 - 2x$.

Studiamo il segno di y' e compiliamo il quadro dei segni (figura 5a).

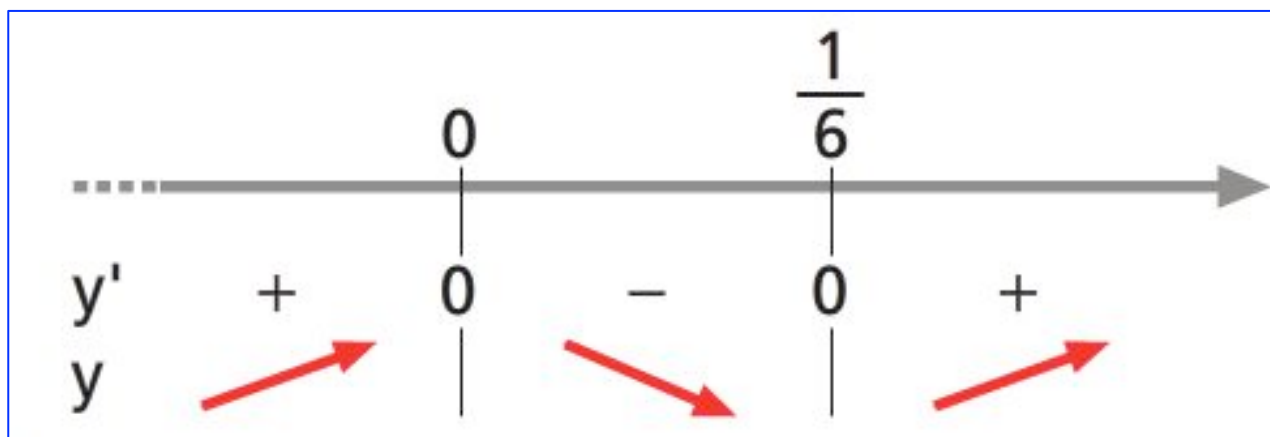
$$12x^2 - 2x > 0 \rightarrow 2x(6x - 1) > 0 \rightarrow x < 0 \vee x > \frac{1}{6}.$$



a. Il quadro dei segni di y' .

Applicando il teorema precedente (figura 5b), concludiamo che:

- per $x < 0$ $f(x)$ è crescente;
- per $0 < x < \frac{1}{6}$ $f(x)$ è decrescente;
- per $x > \frac{1}{6}$ $f(x)$ è crescente.



b. Negli intervalli con segno positivo, la freccia rivolta verso l'alto dice che la funzione y è crescente; in quelli con segno negativo, la freccia rivolta verso il basso indica che la funzione è decrescente.

Si può invertire il teorema precedente nel seguente modo.

■ TEOREMA

Data una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I :

1. se $f(x)$ è crescente in I , allora $f'(x) \geq 0$ per ogni x interno a I ;
2. se $f(x)$ è decrescente in I , allora $f'(x) \leq 0$ per ogni x interno a I .

● Per esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è crescente in $\mathbb{R}$, e si ha $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

IL TEOREMA DI CAUCHY

TEOREMA

Teorema di Cauchy

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono:

- continue nell'intervallo limitato e chiuso $[a; b]$,
- derivabili in ogni punto interno a questo intervallo,
- $g'(x) \neq 0$ per ogni x interno ad $[a; b]$,

allora esiste almeno un punto c interno ad $[a; b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c interno all'intervallo.

Ipotesi

1. $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a; b]$
2. $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $]a; b[$
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a; b[$



Tesi

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DIMOSTRAZIONE

Consideriamo la funzione:

$$F(x) = f(x) - kg(x), \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

Per ipotesi, $F(x)$ è continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$, perché differenza di funzioni continue e derivabili in tali intervalli.

Determiniamo k in modo che $F(x)$ soddisfi la terza ipotesi del teorema di Rolle e cioè $F(a) = F(b)$.

Deve essere:

$$f(a) - kg(a) = f(b) - kg(b) \quad \rightarrow \quad k = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

La funzione $F(x)$ diventa allora:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

$F(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, perciò esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ tale che $F'(c) = 0$.

Si ha

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

da cui:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Si ottiene così:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

ESEMPIO

Consideriamo, nell'intervallo $[1; 3]$, le funzioni:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x^2.$$

Queste funzioni sono continue e derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre $g'(x) = 4x \neq 0 \quad \forall x \in]1; 3[$.

Quindi le ipotesi del teorema di Cauchy sono soddisfatte. Verifichiamo se esiste $c \in]1; 3[$ tale che:

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Poiché $f(1) = -1$, $f(3) = 13$, $g(1) = 2$, $g(3) = 18$, si ha:

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{13 + 1}{18 - 2} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}.$$

Inoltre:

$$f'(x) = 6x - 5, g'(x) = 4x \quad \rightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{6c - 5}{4c}.$$

Allora:

$$\frac{6c - 5}{4c} = \frac{7}{8} \quad \rightarrow \quad \frac{12c - 10}{8c} = \frac{7c}{8c} \quad \rightarrow \quad 5c = 10 \quad \rightarrow \quad c = 2.$$

Poiché $c = 2 \in]1; 3[$, il teorema di Cauchy è verificato.

IL TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

IMPORTANTE

Questo teorema permette di calcolare limiti di quozienti di funzioni nelle forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞ . La regola si può estendere per cercare di calcolare limiti di funzioni appartenenti ad altre forme indeterminate.

TEOREMA

Teorema di De L'Hospital

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite nell'intorno I di un punto x_0 , se:

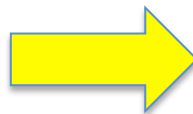
- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $I - \{x_0\}$,
- $g'(x) \neq 0$ in $I - \{x_0\}$,
- esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ipotesi

1. $f(x)$ e $g(x)$ definite e derivabili in $I - \{c\}$
2. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (I - \{c\})$
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$
4. $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$



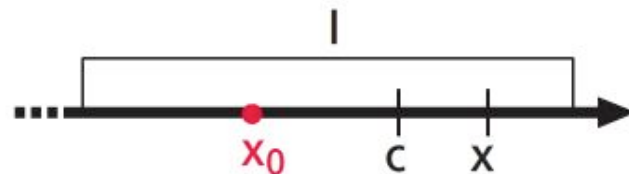
Tesi

1. $\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$
2. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

DIMOSTRAZIONE

Se consideriamo un punto qualsiasi x dell'intorno I diverso da x_0 , possiamo applicare il teorema di Cauchy alle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[x_0; x]$. Esiste allora un punto $c \in]x_0; x[$ per cui:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$



Poiché per ipotesi è $f(x_0) = g(x_0) = 0$, scriviamo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Se $x \rightarrow x_0$ anche $c \rightarrow x_0$, quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

ma poiché è $\lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora concludiamo che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{\ln x}$.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Le due funzioni $f(x) = 4x^2 - 4$ e $g(x) = \ln x$ verificano in un intorno di 1 le ipotesi del teorema di De L'Hospital, quindi possiamo scrivere che:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x}{\frac{1}{x}} = 8.$$

Si può dimostrare che il teorema è valido anche quando le due funzioni non sono definite in x_0 , ma la prima ipotesi viene sostituita da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

oppure:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Il teorema è vero anche se I è un intorno *destro* o *sinistro* di x_0 , in tal caso ovviamente si considerano i limiti per $x \rightarrow x_0^+$ o per $x \rightarrow x_0^-$.

Il teorema si estende anche al caso di limite per $x \rightarrow +\infty$ (o $-\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

e la relazione è analoga per $x \rightarrow -\infty$.

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{2x + 1}.$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ed essendo rispettate le altre ipotesi del teorema di De L'Hospital, possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \frac{3}{2}.$$

Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate si presenti anch'esso come una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ e le funzioni $f'(x)$ e $g'(x)$ soddisfino le ipotesi del teorema, si può passare al limite del quoziente delle derivate seconde, e così via per le derivate successive.

ESEMPIO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3}.$$

Tale limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applicando il teorema di De L'Hospital, essendo verificate le sue ipotesi, possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2}.$$

Anche questo limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applichiamo ancora il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{12x} = -\frac{1}{12}.$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3} = -\frac{1}{12}.$$

● Abbiamo utilizzato il limite fondamentale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

OSSERVAZIONE

- Se non esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, non è detto che non possa esistere $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Per esempio, consideriamo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{7x - \sin x}$. Abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e possiamo provare ad applicare il teorema di De L'Hospital ottenendo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos x}{7 - \cos x},$$

che non esiste, mentre, per il limite iniziale, dividendo numeratore e denominatore per x , otteniamo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{7x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{7 - \frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{7}.$$

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI DE L'HOSPITAL AD ALTRE FORME INDETERMINATE

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

per calcolare il limite del prodotto $f(x) \cdot g(x)$ possiamo osservare che:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Quindi ci siamo ricondotti alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per la quale possiamo applicare il teorema di De L'Hospital.

Analogamente, trasformando il prodotto nella forma

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \quad \text{ci riconduciamo alla forma indeterminata } \frac{\infty}{\infty}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \cdot e^{-4x}.$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

Applicando il ragionamento precedente, abbiamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \cdot e^{-4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{e^{4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4e^{4x}} = 0.$$

Forma indeterminata $+\infty - \infty$

Quando si deve calcolare il limite della differenza di due funzioni che tendono entrambe a $+\infty$ o a $-\infty$, si cerca di scrivere la differenza come prodotto o quoziente di funzioni in modo da ricondursi a una delle forme precedenti.

ESEMPIO

Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{3}{x} \right).$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.

Ma poiché

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{3}{x} = \frac{x - 3 \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x},$$

e la seconda espressione tende a $\frac{0}{0}$, possiamo applicare il teorema di De l'Hospital a quest'ultima:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 3 \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 3 \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = -\infty.$$

Forme indeterminate $0^0, 1^\infty, \infty^0$

Queste forme indeterminate si presentano quando si deve calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} \quad (\text{con } f(x) > 0),$$

in uno dei seguenti casi:

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0;$
b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1,$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty;$
c) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty,$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$

Ma poiché

$$[f(x)]^{g(x)} = [e^{\ln f(x)}]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \ln f(x)]}.$$

Quindi basta calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \cdot \ln f(x)]$, che è della forma $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO

Calcoliamo il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{2x}.$$

Questo limite è nella forma indeterminata 0^0 . Allora dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} [2x \cdot \ln(e^x - 1)] &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x - 1}}{-\frac{1}{2x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \cdot \frac{-2x^2}{e^x - 1} = 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x}{e^x} = 0. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{2x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} [2x \cdot \ln(e^x - 1)]} = e^0 = 1.$$

● Abbiamo applicato il teorema di De L'Hospital due volte consecutive.

Il confronto di infiniti

Applicando il teorema di De L'Hospital, ritroviamo i risultati ottenuti con la gerarchia degli infiniti, nel confronto tra le funzioni $\ln x$, x^α (con $\alpha > 0$), e^x per $x \rightarrow +\infty$.

I limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ si presentano nelle forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e le funzioni considerate verificano le ipotesi del teorema di De L'Hospital, per cui:

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = +\infty;$$
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

ESERCIZI

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $f(x) = -x^3 + 3x$, verifichiamo che nell'intervallo $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ valgono le ipotesi del teorema di Rolle e troviamo i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

Si devono verificare tre condizioni:

- $f(x)$ è continua in $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$;
- $f(x)$ è derivabile in $] -\sqrt{3}; \sqrt{3} [$;
- $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$.

Le tre condizioni sono vere perché:

- la funzione è polinomiale, quindi continua in $\mathbb{R}$;
- la sua derivata $f'(x) = -3x^2 + 3$ esiste in $\mathbb{R}$;
- essendo:

$$f(-\sqrt{3}) = +3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0,$$

$$f(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 0,$$

si ha $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3})$.

Deve esistere almeno un punto c nel quale:

$$f'(c) = 0.$$

La derivata nel punto c è:

$$f'(c) = -3c^2 + 3.$$

Sostituiamo nella precedente relazione:

$$-3c^2 + 3 = 0 \rightarrow c^2 = 1 \rightarrow c = \pm 1.$$

Entrambi i valori $c = 1$ e $c = -1$ sono accettabili perché interni all'intervallo $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

ESERCIZIO GUIDA

Dimostriamo che l'equazione $x^3 + 3x - 2 = 0$ ha una sola soluzione reale.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 + 3x - 2$. Poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, il suo grafico interseca l'asse x almeno in un punto, ossia l'equazione ha *almeno* una soluzione. Supponiamo ora per assurdo che la funzione si annulli in due punti distinti x_1 e x_2 (cioè supponiamo che l'equazione corrispondente abbia due soluzioni).

Poiché $f(x)$ è polinomiale, la funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$. Inoltre $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Quindi $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[x_1; x_2]$. Allora esiste un punto $c \in]x_1; x_2[$ tale che $f'(c) = 0$. Ma:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La derivata di $f(x)$ è sempre strettamente positiva, quindi non si annulla mai. Abbiamo pertanto raggiunto un assurdo.

Dunque $f(x)$ non si può annullare in due punti distinti, cioè l'equazione data non ammette più di una soluzione.

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $f(x) = x^3 - 2x$, verifichiamo che nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange e troviamo i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

La funzione $f(x)$ è continua in $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ e derivabile in $\left]-\frac{1}{2}; 2\right[$ perché è una funzione polinomiale.

Poiché sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange, deve esistere almeno un punto c nel quale:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{2 + \frac{1}{2}}.$$

Si ha:

$$f'(c) = 3c^2 - 2; \quad f(2) = 4; \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}.$$

Sostituiamo nella relazione precedente:

$$3c^2 - 2 = \frac{4 - \frac{7}{8}}{\frac{5}{2}} \rightarrow 3c^2 = 2 + \frac{\frac{25}{8}}{\frac{5}{2}} \rightarrow 3c^2 = \frac{5}{4} + 2 \rightarrow c^2 = \frac{13}{12} \rightarrow c = \pm \sqrt{\frac{13}{12}}.$$

Dei due valori, solo $\sqrt{\frac{13}{12}}$ è accettabile, perché appartiene all'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

ESERCIZIO GUIDA

Data la funzione $y = f(x) = (x - 1)^2$, troviamo (se esiste) il punto P del suo grafico, compreso fra $A(0; 1)$ e $B(3; 4)$, che verifica il teorema di Lagrange. Interpretiamo poi graficamente il risultato ottenuto.

Il grafico di $y = (x - 1)^2$ è una parabola di vertice $V(1; 0)$.

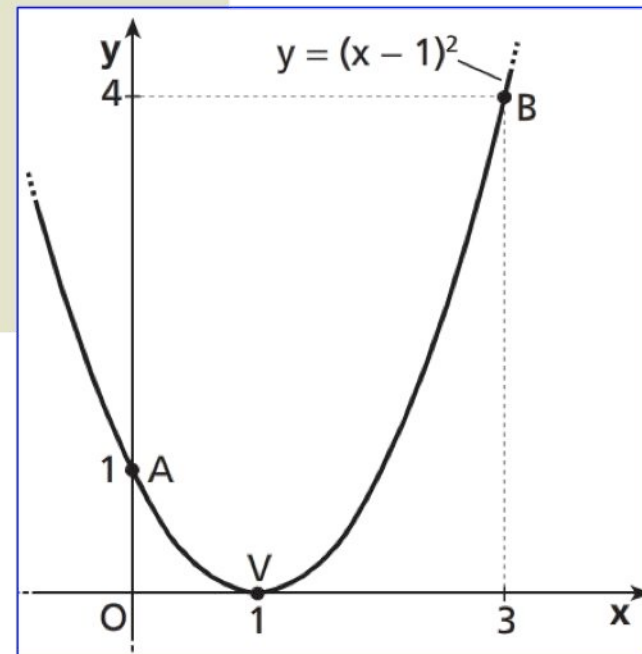
La funzione è continua in $[0; 3]$ e derivabile in $]0; 3[$, con:

$$f'(x) = 2(x - 1).$$

Pertanto vale il teorema di Lagrange ed esiste c tale che:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0};$$

$$f'(c) = 2(c - 1); \quad f(3) = 4; \quad f(0) = 1.$$

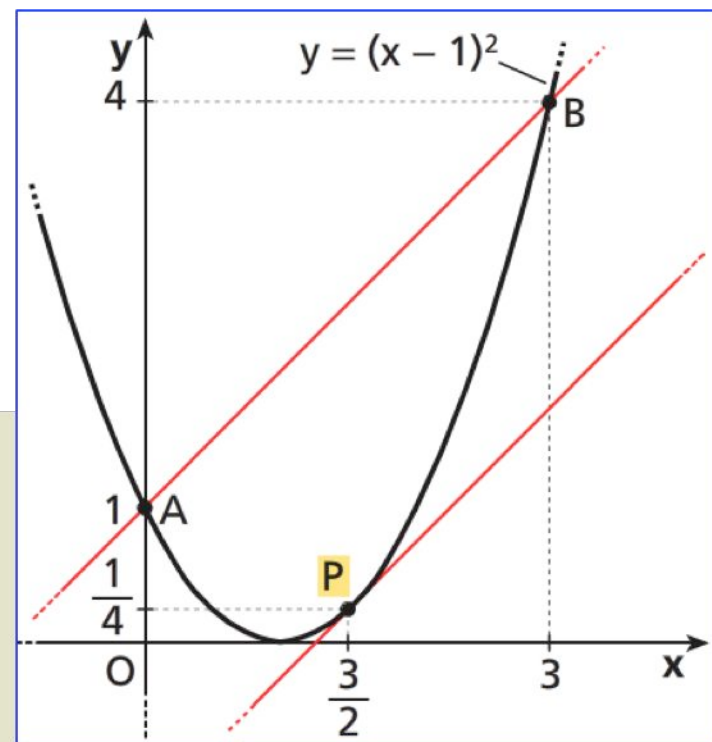


Sostituendo nella relazione precedente:

$$2c - 2 = \frac{4 - 1}{3} \rightarrow 2c = 1 + 2 \rightarrow c = \frac{3}{2}.$$

L'ascissa di P è $\frac{3}{2}$. Poiché $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$, il punto P ha coordinate $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

In $x = \frac{3}{2}$ si ha $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$ e il coefficiente angolare di AB è 1, quindi nel grafico P è il punto della parabola in cui la tangente è parallela alla retta passante per A e per B , estremi dell'intervallo considerato.



ESERCIZIO GUIDA

Studiamo la continuità e la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x} & \text{se } x \leq 1 \\ 4x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

- Studiamo la continuità.

Per $x \leq 1$ la funzione è razionale fratta e il denominatore si annulla per $x = 0$, quindi $f(x)$ è continua per $x \neq 0$; per $x > 1$ la funzione è continua.

Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 3}{x} = 4 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 4x^2 = 4.$$

Poiché i due limiti sono uguali a $f(1) = 4$, $f(x)$ è continua in $x = 1$.

Si ha allora che $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Studiamo la derivabilità.

Calcoliamo la derivata di $f(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - (x^2 + 3)}{x^2} & \text{se } x < 1 \\ 8x & \text{se } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3}{x^2} & \text{se } x < 1 \\ 8x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Per $x < 1 \vee x > 1$ è derivabile, a eccezione del punto $x = 0$ in cui non è continua. Per stabilire se la funzione è derivabile in $x = 1$, applichiamo il criterio di derivabilità calcolando i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ per $x \rightarrow 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3}{x^2} = -2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 8x = 8.$$

Poiché i due limiti sono diversi, la funzione non è derivabile in $x = 1$.

In $x = 1$ la funzione ha un punto angoloso.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo per quali valori dei parametri a e b la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2-x} & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2ax^2 - bx - 4 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

è derivabile nell'intervallo $[-1; 4]$.

- È necessario che innanzitutto la funzione sia continua:

per $-1 \leq x < 1$, la funzione è razionale fratta e il denominatore non si annulla mai, per cui $f(x)$ è continua in $[-1; 1[$;

per $1 \leq x \leq 4$, la funzione è polinomiale, quindi è continua in $]1; 4]$;

affinché $f(x)$ sia continua in tutto l'intervallo $[-1; 4]$ occorre però che sia continua anche in $x = 1$

e quindi che $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{2-x} = a;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2ax^2 - bx - 4) = 2a - b - 4.$$

Allora otteniamo la seguente condizione sui parametri:

$$a = 2a - b - 4 \rightarrow a = b + 4.$$

- Verifichiamo la derivabilità:

$$\text{per } -1 < x < 1, \quad f'(x) = \frac{a}{(2-x)^2};$$

$$\text{per } 1 < x < 4, \quad f'(x) = 4ax - b.$$

$f(x)$ è derivabile in $x = 1$ se $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a}{(2-x)^2} = a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4ax - b) = 4a - b.$$

$$a = 4a - b \rightarrow b = 3a.$$

Otteniamo quindi un sistema di due equazioni nelle due incognite a e b :

$$\begin{cases} a = b + 4 \\ b = 3a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3a + 4 \\ b = 3a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a = 4 \\ b = 3a \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -6 \end{cases}$$

La funzione è derivabile quando $a = -2$ e $b = -6$.

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo gli intervalli in cui le seguenti funzioni sono crescenti e quelli in cui sono decrescenti.

$$\text{a) } y = \frac{4x^2 + 1}{2x}$$

a) La funzione è razionale fratta, quindi è definita per $2x \neq 0$, ovvero $D: x \neq 0$. Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{8x(2x) - 2(4x^2 + 1)}{(2x)^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2}.$$

Studiamo il segno di y' :

$$\frac{4x^2 - 1}{2x^2} > 0$$

$$4x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$$

$$2x^2 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Compiliamo il quadro dei segni (a lato).

Per la condizione sufficiente sulle funzioni crescenti:

$$\text{per } x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}$$

$f(x)$ è crescente;

$$\text{per } -\frac{1}{2} < x < 0 \vee 0 < x < \frac{1}{2}$$

$f(x)$ è decrescente.

	...	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		...
$4x^2 - 1$	+	0	-		-	0	+	
$2x^2$	+		+	0	+		+	
$f'(x)$	+	0	-	$\neq$	-	0	+	
$f(x)$								

$$\text{b) } y = \ln \frac{x-1}{x+2}$$

b) La funzione $y = \ln \frac{x-1}{x+2}$ è trascendente

logaritmica, quindi è definita per $\frac{x-1}{x+2} > 0$:

$$x - 1 > 0 \rightarrow x > 1;$$

$$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2.$$

Compiliamo il quadro dei segni (a lato).

Il dominio della funzione è:

$$D:]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[.$$

Calcoliamo ora la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{\frac{x-1}{x+2}} \cdot \frac{1(x+2) - 1(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{\cancel{x}+2 - \cancel{x}+1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}.$$

Studiamo il segno di y' . Poiché il numeratore è sempre positivo, y' ha lo stesso segno del denominatore:

$$y' > 0 \rightarrow (x-1)(x+2) > 0 \quad \text{per } x < -2 \vee x > 1.$$

Applicando la condizione sufficiente per le funzioni crescenti, si ha che $f(x)$ è crescente per $x < -2 \vee x > 1$. Poiché questo intervallo coincide con il dominio, la funzione non è mai decrescente.

		- 2		1	
	...				→
$x - 1$	-		-	0	+
$x + 2$	-	0	+		+
$\frac{x-1}{x+2}$	+	0	-	0	+

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo per quali valori di k la condizione sufficiente per le funzioni crescenti e decrescenti permette di affermare che la funzione

$$f(x) = kx^3 - 3kx^2 + x + 8, \quad \text{con } k \in \mathbb{R},$$

è sempre crescente in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = 3kx^2 - 6kx + 1.$$

Se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione è sempre crescente in $\mathbb{R}$. Poniamo quindi:

$$3kx^2 - 6kx + 1 > 0.$$

La disequazione risulta sempre verificata se è

$\Delta < 0 \wedge 3k > 0$. Utilizziamo $\frac{\Delta}{4}$:

$$\frac{\Delta}{4} = (3k)^2 - 3k = 9k^2 - 3k.$$

Poniamo $\frac{\Delta}{4} < 0$:

$$9k^2 - 3k < 0.$$

La disequazione è verificata per $0 < k < \frac{1}{3}$.

La funzione assegnata è sempre crescente in $\mathbb{R}$ per:

$$0 < k < \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Date le funzioni $f(x) = x^2 - 2x + 4$ e $g(x) = 4x^2 + 2x$, verifichiamo che nell'intervallo $[1; 3]$ valgono le ipotesi del teorema di Cauchy e troviamo i punti la cui esistenza è assicurata dal teorema.

Sono verificate le tre condizioni:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[1; 3]$ perché sono funzioni polinomiali;
- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $]1; 3[$ con $f'(x) = 2x - 2$ e $g'(x) = 8x + 2$;
- $g'(x) \neq 0$ in $]1; 3[$. Infatti $g'(x) = 8x + 2 \neq 0$ per $x \neq -\frac{1}{4}$.

Pertanto vale il teorema e deve esistere almeno un punto c nel quale:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)}.$$

Si ha:

$$\frac{2c - 2}{8c + 2} = \frac{7 - 3}{42 - 6} \rightarrow \frac{c - 1}{4c + 1} = \frac{1}{9} \rightarrow 9(c - 1) = 4c + 1 \left(c \neq -\frac{1}{4} \right) \rightarrow c = 2.$$

Il punto cercato è $c = 2$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4} - 1}{x^2 - 25}.$$

Per $x \rightarrow 5$, $f(x) = \sqrt{x-4} - 1$ e $g(x) = x^2 - 25$ tendono entrambe a 0, pertanto il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La funzione $f(x)$ è definita per $x \geq 4$. Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in un intorno di 5.

Le derivate sono:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x \neq 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0.$$

Poiché esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20},$$

tutte le ipotesi del teorema di De l'Hospital sono verificate, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{20}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^2 - 2x}$.

Per $x \rightarrow +\infty$, $f(x) = e^{2x}$ e $g(x) = x^2 - 2x$ tendono entrambe a $+\infty$.
 $f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili per ogni $x \in \mathbb{R}$ e hanno per derivate:

$$f'(x) = 2e^{2x} \quad \text{e} \quad g'(x) = 2x - 2 \neq 0 \text{ per } x \neq 1.$$

Consideriamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2x - 2}.$$

Poiché si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, deriviamo ulteriormente,

$$f''(x) = 4e^{2x} \quad \text{e} \quad g''(x) = 2 \neq 0,$$

e calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = +\infty.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right)$$

Il limite è nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Per poter applicare il teorema di De L'Hospital, cerchiamo di scriverlo nella forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

Trasformiamo la funzione ricordando che $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x}.$$

Il limite ottenuto è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e, poiché sono soddisfatte tutte le altre ipotesi del teorema di De L'Hospital, possiamo calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(\sin x - x \cos x)}{D(x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x}.$$

Il limite ottenuto è ancora nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(x \sin x)}{D(\sin x + x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0.$$

Il limite assegnato vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \cotg x \right) = 0.$$

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$.

Il limite è nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$. Trasformiamo la funzione:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Il limite ottenuto è nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Calcoliamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D(\ln x)}{D\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Per il teorema di De L'Hospital si ha: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$.

ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo i limiti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg} x}$$

a) Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0 .

Ricordando l'identità $A = e^{\ln A}$, se $A = x^{\operatorname{tg} x}$ si può scrivere:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{x^{\operatorname{tg} x}} & = & e^{\ln \boxed{x^{\operatorname{tg} x}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & & A \end{array}$$

Per la proprietà dei logaritmi si ha $e^{\ln x^{\operatorname{tg} x}} = e^{\operatorname{tg} x \ln x}$.

Calcoliamo allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\operatorname{tg} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x}.$$

Occorre quindi calcolare $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}.$$

Il limite ottenuto è nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Applichiamo il teorema di De L'Hospital, poiché tutte le ipotesi sono verificate:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D \ln x}{D \operatorname{cotg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (-\operatorname{sen}^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} (-\operatorname{sen} x) = 0.$$

Si ha allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x = 0.$$

Pertanto, in sintesi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\operatorname{tg} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} x \ln x} = e^0 = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}}$$

b) Il limite è nella forma indeterminata ∞^0 .

Ragionando come nella parte a), possiamo scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(x^2 - 8x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 8x)}{x}}$$

Quindi basta calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 8x)}{x},$$

che si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Poiché sono verificate le ipotesi, applichiamo il teorema di De L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 8x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x - 8}{x^2 - 8x}}{1} = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 8x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 8x)}{x}} = e^0 = 1.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$$

c) Il limite è nella forma indeterminata 1^∞ . Abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - x) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - x} = -1,$$

per cui:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1 - x) \right]} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$